**DOCENTE:** GLORIA BIVIANA BADILLO MEDINA
**AREA/ASIGNATURA:** MATEMATICA
**GRADO:** NOVENO **(PARA LOS ESTUDIANTES QUE NO ESTÁN EN CLASSROOM)**

**COMPETENCIAS:**

- Comunicación
- Razonamiento
- Resolución

**APRENDIZAJES:**

- Utilizar propiedades y relaciones de los números reales para resolver problemas.
- Interpretar usar expresiones algebraicas equivalentes.
- Verificar conjeturas acerca de los números reales, usando procesos inductivos y deductivos desde el lenguaje algebraico.

**CONTENIDOS:**

- Expresiones algebraicas

**Actividad Inicial: Conectándonos**

1. Retomaremos poco a poco el proceso de aprendizaje de la asignatura, revisa lo que ya hiciste y continúa donde vamos. La idea es repasar, contextualizarnos y empezar a familiarizarnos con las herramientas virtuales disponibles.

2. Realiza la lectura comprometida del documento, la información y los ejemplos son necesarios para poder realizar los ejercicios propuestos. En tu cuaderno responde cada una de las preguntas y actividades que se plantean a lo largo del documento, al igual que los tres **Talleres de aplicación** que se encuentran al final de cada tema.

   Estos son temas que ya desarrollamos en clase. La fecha de entrega es el **27 de JULIO**.

3. Hacer llegar el trabajo realizado:

   **a.** Si dispone de un celular y conectividad, descargar aplicación **camscanner** (Aplicación gratuita y compactible) para digitalizar su trabajo en un solo documento en pdf. Y enviarlo al correo electrónico bivianabadillo@ieacademico.edu.co.

   Este es un video explicativo de como usar CamScanner para digitalizar el documento en pdf y enviar al email. https://www.youtube.com/watch?v=JgHWY_ffb9g

   **b.** Si no dispone de los medios para digitalizarlo y enviarlo, favor dejarlo en la portería del colegio debidamente marcado, con su nombre completo, grado, docente a quien se dirige y en una bolsa plástica transparente

4. Presentar las comprobaciones de aprendizaje (Evaluaciones) de estos temas en el momento en que regresemos al colegio.

**OJO:**
**Los estudiantes de noveno que están en Classroom no deben realizar este trabajo.**

# Tema 2. Factorización de polinomios

## Indagación

Vamos a recordar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

Por ejemplo, si queremos resolver $5b^2(b + 1)$, observamos que es una expresión algebraica compuesta por dos factores, es decir, dos expresiones que se multiplican: un monomio y un binomio. Entonces, aplicamos la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, multiplicando $5b^2(b) + 5b^2(1)$, y nos queda:

$$5b^2(b + 1) = (5b^2)(b) + (5b^2)(1) = 5b^3 + 5b^2.$$

¿Cómo escribirías la expresión algebraica $5b^3 + 5b^2$ si te la pidieran en forma de factores?

Intenta hacer una propuesta de solución y coméntala con tus compañeros.

## Conceptualización

Revisemos el siguiente resumen de productos y cocientes notables

| Productos notables |
|---|
| **Cuadrado del binomio**<br>$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$<br>$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| **Cubo del binomio**<br>$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$<br>$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| **Diferencia de cuadrados**<br>$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ |
| **Diferencia de cubos**<br>$a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$ |
| **Suma de cubos**<br>$a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$ |

| Cocientes Notables |
|---|
| $\frac{(a + b)^2}{(a + b)} = (a + b)$ |
| $\frac{a^2 - b^2}{(a - b)} = (a + b)$    $\frac{a^2 - b^2}{(a + b)} = (a - b)$ |
| $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$ |
| $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$ |
| $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$ |

**Factorizar** significa expresar en factores, es decir, expresar en términos o valores que se multipliquen.

***El proceso que consiste en encontrar varios números cuyo producto sea igual a un número dado se conoce con el nombre de factorización.***

Por ejemplo:

3 y 5 son factores de 15, porque $(3)(5) = 15$.

2 y a son factores de 2a, porque $(2)(a) = 2a$.

Los factores de $45x^2y^3$ son 45, $x^2$ y $y^3$, porque $(45)(x^2)(y^3) = 45x^2y^3$.

También $9x^2$ y $5y^3$ son factores de $45x^2y^3$, porque $(9x^2)(5y^3) = 45x^2y^3$

Pero $45x^2y^3$ pueden tener otros factores (expresiones o términos que multiplicados den la expresión dada).

En tu cuaderno, completa los factores:

$15\square$ y $\square y^3$ son los factores de $45x^2y^3$, porque ( )( ) = $45x^2y^3$.

$5x\square$ , $3y\square$ y $\square y$ son los factores de $45x^2y^3$, porque ( )( )( )= $45x^2y^3$.

Y así, podríamos seguir buscando más expresiones que multiplicadas nos dieran $45x^2y^3$. Encuentra otras, y compártalas con algunos de tus compañeros.

## Extracción del factor común

Dada una expresión algebraica, observamos las letras que se repiten en sus términos, si las hay. Y también revisamos si en sus coeficientes hay un máximo común divisor (MCD).

Por ejemplo, en la expresión $6x^3 + 3x^2 + 9x$, la x se repite en cada término y 3 es el MCD de 6, 3 y 9, entonces 3x es el mayor factor común o máximo factor común.

**Ejemplo:**

Factorizar $6a^4 + 36a^3 + 60a^2$, encontrando el máximo factor común.
Máximo factor común de $6a^4 + 36a^3 + 60a^2$ es $6a^2$.
Por lo tanto, $6a^2$ ( ¿? + ¿? + ¿? ) = $6a^4 + 36a^3 + 60a^2$.

Nos preguntamos: ¿cuál valor por $6a^2$ da $6a^4$? Respondemos: $a^2$.
¿Cuál valor por $6a^2$ da $36a^3$? Respondemos: 6a.
¿Cuál valor por $6a^2$ da $60a^2$? Respondemos: 10.

Luego, $6a^4 + 36a^3 + 60a^2 = 6a^2(a^2 + 6a + 10)$.

## Factorización de trinomios

Hemos estudiado los procesos para encontrar el producto de dos polinomios, ahora analizaremos el problema inverso: conocido el polinomio, encontremos sus factores.

Si $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, entonces $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, por la propiedad simétrica de la igualdad.

El trinomio $a^2 + 2ab + b^2$, expresado en factores equivale al producto $(a + b)(a + b)$ que es igual a $(a + b)^2$.

Ejemplo: Expresemos en factores el trinomio $9x^2 + 12xy + 4y^2$.

**Solución**

Buscamos la raíz cuadrada de los extremos del trinomio $9x^2 + 12xy + 4y^2$

Raíz cuadrada de los extremos del trinomio $\longrightarrow$ $(3x)$ $(2y)$

Verificamos que el término del centro es 2 por la raíz del primero por la raíz del segundo: $2(3x)(2y) = 12xy$.

Luego, el trinomio $9x^2 + 12xy + 4y^2$, factorizado, es $(3x + 2y)^2$ y se escribe: $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x + 2y)^2$.

Igual procedemos con el trinomio de la forma $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, teniendo cuidado con los signos.

Veamos otro ejemplo: Factorizar el trinomio $4x^2 - 12xy + 9y^2$.

Buscamos la raíz cuadrada de los extremos del trinomio $4x^2 - 12xy + 9y^2$

Raíz cuadrada de los extremos del trinomio $\longrightarrow$ $(2x)$ $(3y)$

Verificamos que el término del centro es -2 por la raíz del primero por la raíz del segundo:

$$-2(2x)(3y) = -12xy.$$

Luego el trinomio $4x^2 - 12xy + 9y^2$ factorizado es $(2x - 3y)^2$ y se escribe: $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$.

## Factorización de una diferencia de cuadrados

Recordemos que el producto de la forma $(a + b)(a - b)$ se conoce con el nombre producto de binomios conjugados y su resultado es una diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Por la propiedad simétrica de la igualdad, la expresión $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ es equivalente a la expresión $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, de donde se deduce que la factorización de una diferencia de cuadrados es el producto de binomios conjugados.

**Ejemplo:**

Factorizar $x^2 - 9$.

Buscamos la raíz cuadrada de cada término de $x^2 - 9$

Raíces cuadradas $\longrightarrow$ $x$ $\quad 3$

Como $x^2 - 9$ es de la forma **$(a + b)(a - b) = a^2 – b^2$**, entonces,

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

## Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$

Encontrar dos números que multiplicados den una cantidad x y sumados otra cantidad y es un cálculo especial; una forma de resolverlo es realizando ensayos. Realiza esta actividad en grupo, y verás que te será de mucha utilidad para esta sesión.

Recordemos ahora que todo producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$, con $a \neq b$, recibe el nombre de producto de binomios con un término común, donde x es llamado término común y a y b, términos diferentes.

Términos Diferentes

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Término Común

Su resultado corresponde al cuadrado del término común, más o menos la suma algebraica de los términos diferentes multiplicada por el término común, más o menos el producto algebraico de los términos diferentes.

**Ejemplo:**

a. Factorizar $x^2 + 6x + 8$

La raíz cuadrada del término $x^2$ es $\sqrt{x^2} = x$

El término numérico o independiente es 8.

Los factores de 8 son 2 y 4, cuya suma da el coeficiente del término de primer grado (x).

Entonces, la factorización queda así:

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)\,(x + 4)$$

$$8 = (2)(4)$$

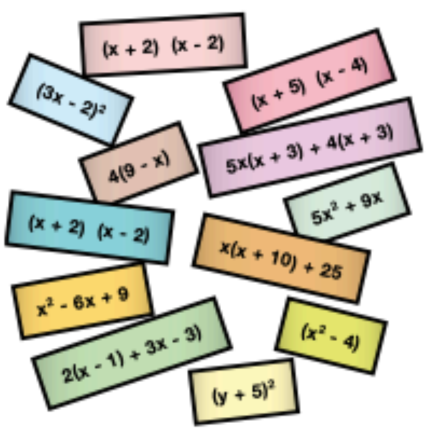
$$6 = 2 + 4$$

Luego, la factorización pedida es

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4).$$

## Aplicación

1. Clasifica, en dos columnas, las siguientes expresiones dependiendo de que si están o no factorizadas:




| Expresión factorizada | Expresión no factorizada |
|---|---|
| | |

2. Busca en la columna de la derecha expresión factorizada que le corresponde a cada una de las expresiones de la izquierda:
Completa en tu cuaderno, los términos que faltan.

| **Expresiones para factorizar** | **Factorizaciones** |
|---|---|
| $3x(x+5)-4(x+5)$ | $(y+12)(y-12)$ |
| $y^2-144$ | $(x-4)^2$ |
| $(x+1)(x-1)+(2x-2)$ | $(3x-4)(x+5)$ |
| $(x-3)^2-2(x-3)+1$ | $(x+2)^2$ |
| $9x+30x+25$ | $(x-1)(x+3)$ |
| $x(x+4)+4$ | |

3.
a. $64+48x+9x^2=(\_\_+\_\_)^2$

b. $x^2-\_\_=(\_\_+7)(\_\_-\_\_)$

c. $(3x+\_\_)^2=\_\_+\_\_+25$

4.
a. $(3x+\_\_)^2=\_\_+24x+\_\_$

b. $(0.7-x)(\_\_+x)=0.49-\_\_$

5.

| Polinomio | Máximo factor común | Factorización |
|---|---|---|
| $4a^2+12$ | | |
| $15x^4+15x^3$ | | |
| $b^5+b^4+b^3$ | | |
| $22a\,b-55a\,b$ | | |
| $35x^2y+28xy^3+21x^4y^3$ | | |

Trabaja el término conveniente para obtener trinomios cuadrados perfectos:

6.

a. $4 + 20x$

b. $- 60\, xy^2 + 9x^2$

7.

a. $\frac{1}{4}x^2 + 1 \ldots$

b. $0.25^2 \quad 7ab$

Individualmente, factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos. Si lo deseas, usa tu calculadora:

8.

a. $\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{12}ab + \frac{1}{16}b^2 =$

b. $81m^4 - 54m^2 n^2 + 9n^4 =$

9.

a. $36a^2b^2 + 24abc + 4c^2 =$

b. $\frac{1}{4}x^6 - \frac{4}{10}x^3y^2 + \frac{4}{25}y^4 =$

10.

a. $49y^2 - 36 =$

b. $\frac{9}{16}a^2 - b^2 =$

**Entendemos por…**

**Factores** todos aquellos números que se multiplican para obtener otro número:
por ejemplo: 3 y 4 son factores de 12, porque
3 x 4 = 12, pero también 2 x 6 = 12, 1 x 12 = 12.
Por tanto, todos los posibles factores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
Los factores de un número se llaman también submúltiplos de él.